Çoklu-Dalgacık (Multiwavelet) Teknikleri İle İmgelerden Gürültü Temizleme Uygulamaları

Erdem Bala* ve Ayşın Baytan Ertuzun
Bogaziçi Üniversitesi
Elektrik-Elektronik Mühendisliği
ertuz@boun.edu.tr

Özetçe

Dalgacık kuramında meydana gelen ilerlemeler, gürültülü bilgiden gerçek işareti elde etmek için kullanılabilecek yeni bir yöntem olan dalgacık eşikleme (wavelet thresholding) yönteminin oluşmasını sağlamıştır. Birden çok ölçek işlevine (scaling function) sahip olan çoklu-dalgacıklar, dalgacık kuramına yeni bir katılımdır. Çoklu-dalgacıklar, dikgenlik (orthogonality), bakışım (symmetry) ve kısa destek (short support) özelliklerini eşzamanlı sağlamaktadırlar. Bu durum, sıradan dalgacıklar ile olası değildir. Bu özellikler, çoklu-dalgacıkları gürültü temizleme, sıkıştırma gibi çeşitli işaret işleme uygulamaları için daha kullanışlı kılmaktadır. Bu çalışmada, çoklu-dalgacıklar ile kullanılmak üzere çeşitli eşikleme yöntemleri ileri sürülecek ve bu yöntemlerin imgelerden Gauss dağılımlı gürültü temizleme sorununa uygulamaları karşılaştırmalı olarak gösterilecektir. Yapılan benzetimler, çoklu-dalgacıkların sıradan dalgacıklardan rakamsal ve görüntüsel olarak daha iyi sonuçlar verdiğini kanıtlamıştır.

1. Giriş

Dalgacık dönüşümü, gürültü temizleme [1] ve sıkıştırma gibi işaret işleme uygulamalarında başarılı sonuçlar veren bir işaret dönüşüm tekniğidir. Dalgacıklar, bir ölçek işlevi ϕ ve dalgacık işlevi ψ ile tanımlanmaktadır. Ayrık dalgacık dönüşümünün, bir çoklu çözünürlük (multiresolution) analizi içinde açıklanabildiği gösterilmiştir [2]. Bu analizdeki dalgacık ve genleşme (dilation) denklemlerinin katsayıları, sırasıyla dalgacıkları gerçeklemede kullanılan yüksek geçiren ve alçak geçiren süzgeçlerin katsayılarına karşılık gelmektedir. Bir işaretin dalgacık dönüşümü, o işareti yüksek geçiren ve alçak geçiren süzgeçlerden geçirdikten sonra çıktıyı seyreltmek, ve alçak geçiren süzgecin çıktısını bu şekilde belirli sayıda işlemek yoluyla elde edilir. Yüksek geçiren süzgeçlerin çıktıları dalgacık katsayılarını, en son basamaktaki alçak geçiren süzgecin çıktıları ise ölçek katsayılarını oluşturmaktadır. İki boyutlu işaretler için, aynı işlem ayrılabilir şekilde yapılabilmektedir.

Çoklu-dalgacıklar, dalgacık kuramına ek olarak yakın geçmişte tanıtılmıştır. Sıradan dalgacıklara benzemelerine rağmen, çoklu-dalgacıkların en önemli farkları, birden çok ölçek ve dalgacık işlevine sahip olmalarıdır. Ölçek ve dalgacık işlevleri, vektörel olarak $\boldsymbol{\Phi}(t) = [\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_L(t)]^T$ ve $\boldsymbol{\psi}(t) = [\psi_1(t), \ldots, \psi_L(t)]^T$ şeklinde tanımlanabilmektedir. Bu durumda, genleşme ve dalgacık denklemleri, sırasıyla

---

* Şu anda Sabancı Üniversitesi Elektrik ve Bilgisayar Mühendisliği'ndedir. erdembala@su.sabanciuniv.edu

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{H}[\mathbf{k}]\boldsymbol{\Phi}(2\mathbf{t}-\mathbf{k}) \tag{1}$$

$$\psi(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{G}[\mathbf{k}]\boldsymbol{\Phi}(2\mathbf{t}-\mathbf{k}) \tag{2}$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki alçak geçiren süzgeç **H** ve yüksek geçiren süzgeç **G**, sayıl değil, katsayılarının büyüklüğü $L \times L$ olan matris süzgeçlerdir. Kuramsal olarak L herhangi bir değer alabilmekle beraber, genellikle uygulamada L'in değeri iki olarak kullanılmaktadır. Çoklu-dalgacıklara ilk önemli örnek olan GHM çoklu-dalgacığı [3], Geronimo, Hardin ve Massopust tarafından tanıtılmıştır. Daha sonra, birçok araştırmacı yeni çoklu-dalgacıklar geliştirmek için çalışmış ve CL [4] , SA4 [5] , SE [6] gibi çeşitli çoklu-dalgacıklar tanıtılmıştır.

Dalgacık eşikleme, Donoho ve Johnston [1] tarafından ileri sürülen bir gürültü temizleme yöntemidir. Dalgacık eşikleme yöntemi ile gürültü temizleme, dalgacık dönüşümü sonucunda elde edilen dalgacık katsayılarının belli bir eşik değer ile kesilmesiyle yapılmaktadır. Bu kesme işlemi yumuşak veya sert şekilde olabilir. Her iki durumda da, eşik değerin altında kalan katsayılar sıfıra çekilmektedir. Eşik değerin üstünde kalan katsayılar, sert eşik kullanılıyor ise aynen kalır; aksi durumda eşik değerin büyüklüğü kadar azaltılır. Çoklu-dalgacık katsayılarının eşiklenmesi yöntemi ile gürültü temizleme ilk defa Strela [7,8] tarafından önerilmiştir. Evrensel eşik ve GHM çoklu-dalgacıklarının çoğunlukla tek boyutlu işaretlerde umut verici sonuçlar doğurduğu gösterilmiştir. Bu çalışmada, sözü edilen ilksel sonuçlardan yola çıkılarak eşik değerleri hesaplamak için çeşitli yöntemler ileri sürülmüştür. Kullanılan temel yöntemler, evrensel eşik (universal thresholding) [1], vektor eşik (vector thresholding) [9], SURE [10] ve GCV [11] yöntemleridir. GHM [3], CL [4], SA4 [5] ve SE [6] çoklu-dalgacıkları ile D4 [12] ve Bi9/7 [13] dalgacıkları kullanılarak karşılaştırmalı sonuçlar elde edilmiştir.

2. Problem Çözümü

Çoklu dalgacıkları gerçeklemede kullanılan alçak geçiren ve yüksek geçiren süzgeçlerin katsayıları, matris şeklinde olduğu için, bu süzgeçlere giren sinyaller de sayıl değil, vektörel olmak zorundadır. Her iki süzgeç de 2 x 2 matris süzgeçler olduğu için, işlenmesi gereken işaret ikili bir vektör sırası şekline dönüştürülmelidir. Bu dönüşüm önsüzgeçleme işlemi ile yapılmaktadır. Birçok önsüzgeçleme yöntemi bulunmasına rağmen, gürültü temizlemede en iyi sonuçları verenler, satır tekrarlama önsüzgeci (repeated-row prefilter, RR) ve yaklaşıklık önsüzgecidir (approximation prefilter, AP) [7].

2.1 Satır Tekrarlama Önsüzgeci

Eldeki N uzunluğundaki sayıl veri $\mathbf{f}_k$, N uzunluğunda ikili bir vektör sırasına $\{\mathbf{y}_{0,k}\}$ dönüştürülmelidir. Bu işlem için ilk akla gelen yöntem, işareti tekrarlayarak (3) süzgeç bankasına iki satırlık yeni bir veri vermektir. $\boldsymbol{\delta}$, yüksek geçiren süzgeç çıktısını sıfıra eşitleyecek şekilde seçilen bir sabiti, 0 altsimgesi ise ayrışım düzeyini belirtmektedir.

$$\mathbf{y}_{\mathbf{0,k}} = \begin{bmatrix} y_{0,k}^{(0)} \\ y_{0,k}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_k \\ \delta f_k \end{bmatrix} \quad k = 0,1,...,N\text{-}1 \tag{3}$$

2.2 Yaklaşıklık Önsüzgeci

Bu tür önsüzgecler, $N/2$ uzunluğunda ikili bir vektör sırası oluşturur. Yaklaşıklık önsüzgeci, özel bir tip matris önsüzgeçleme yapısıdır ve (4) ile ifade edilebilir.

$$\mathbf{y}_{\mathbf{0,k}} = \sum_{m=0}^{M} \mathbf{P}_m \begin{bmatrix} f_{2(m+k)} \\ f_{2(m+k)+1} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Çeşitli çoklu-dalgacıklar için yaklaşım önsüzgeçleri tasarımı hakkında daha fazla bilgi [7]'den elde edilebilir.

2.3 Evrensel Eşik

Evrensel eşik, sıradan dalgacıklar katsayılarına uygulanmak üzere ilk defa Donoho ve Johnstone tarafından tanıtılmıştır [1]. Eşik değeri $\lambda_{evrensel} = \sigma\sqrt{2\,logN}$ formülü ile hesaplanır. Buradaki σ gürültünün standard sapmasını, N ise işaretin uzunluğunu belirtmektedir. İsminden de anlaşılacağı gibi, bu eşik değeri, tüm seviyelerdeki dalgacık katsayılarına uygulanmaktadır. İmgeler için, işaret uzunluğu toplam piksel sayısı olmakla beraber, herbir satırdaki piksel sayısının değerinin kullanımı ile daha yüksek işaret gürültü oranlarına ulaşıldığı görülmektedir.

2.4 Değiştirilmiş Evrensel Eşik

Sıradan dalgacıkların önsüzgeçlemeye gereksinimleri yoktur ve genellikle dikgen dönüşümler kullanılmaktadır. Bu yüzden, σ^2 değişintili bağımsız Gaussian gürültülü bir işaretin dalgacık dönüşümü sonucunda oluşan katsayılar da aynı özelliklerde bir gürültüye sahip olmaktadır. Fakat, önsüzgeçleme işlemi sebebi ile, çoklu-dalgacık dönüşümlerinin ortak değişinti yapısı daha karmaşık bir hal almaktadır. Bu da, evrensel eşik yönteminin performansının düşmesine neden olmaktadır. Çoklu-dalgacık dönüşümünü $\mathbf{M}$, önsüzgeçleme işlemini $\mathbf{P}$, gürültüyü $\boldsymbol{\eta}$ ile ifade edersek, gürültünün dönüşüm ile oluşacak ortak değişinti yapısı $\mathrm{cov}(\mathbf{Z}) = \mathbf{MP\Sigma P^T M^T}$ şeklinde olacaktır. Burada, $\mathbf{Z} = \mathbf{MP}\boldsymbol{\eta}$, ve $\boldsymbol{\Sigma}$ gürültünün ortak değişintisidir. Dikgen bir dönüşüm ve önsüzgeçleme yapısı kullanıldığı zaman, $\mathrm{cov}(\mathbf{Z})$ birim matris olarak ifade edilebilir. Fakat, en genel anlamda önsüzgeç dikgen olmayabilir ki bu durumda ortak değişinti matrisi de birim olmaktan uzaklaşacaktır. Birim matristen uzaklaşmanın ölçüsü olarak bir değişinti sapma katsayısı hesaplanabilir [8]. Bu katsayı, ortak değişinti matrisinin köşegeni üzerindeki her seviyedeki değişinti katsayılarının ortalaması olarak hesaplanır. GHM ve CL çoklu-dalgacıkları için sadece ilk seviyenin kullanılması ile 2 dB büyüklüğünde gelişme görülmüştür. Ayrıca, her seviyede yeni bir eşik değeri hesaplayarak, daha yüksek işaret gürültü oranlarına ulaşılmıştır.

2.5 Vektör Eşik

Vektör eşikleme yöntemi ilk olarak Downie ve Silverman tarafından önerilmiştir [9]. Çoklu-dalgacık dönüşümünün gürültülü bir işarete uygulanması sonucunda 2 uzunluğunda vektörel katsayılar elde edilir.

$$\mathbf{w}_{j,k} = \boldsymbol{\upsilon}_{j,k} + \boldsymbol{\rho}_{j,k} \tag{5}$$

$\mathbf{w}_{\mathbf{j,k}}$ gürültülü işaretin dönüşüm katsayılarını, $\boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{j,k}}$ temiz işaretin katsayılarını, $\boldsymbol{\rho}_{j,k}$ ise gürültünün katsayılarını vermektedir. $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{j,k}}$, çok-değişkenli , $N(0,\boldsymbol{\Theta}_j)$ parametreli bir normal dağılıma sahiptir. (6) şeklinde bir eşitlik tanımlanırsa, eşik değeri λ, dönüşüm katsayıları yerine, $\varsigma_{j,k}$ ile kıyaslanacak, ve yumuşak, sert eşikleme bu kıyaslamanın sonucuna göre gerçekleşecektir.

$$\varsigma_{j,k} = \mathbf{w}_{j,k}{}^{T}\boldsymbol{\Theta}_j{}^{-1}\mathbf{w}_{j,k} \tag{6}$$

2.6 SURE (Stein's Unbiased Risk Estimate)

$X_1, X_2,...X_s$ birbirinden bağımsız $N(\mu_i,1)$ $i = 1,2,...s$ dağılımında, ortalama vektörleri $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1,...,\mu_s)^T$ olan rasgele değişenler olsun. $\hat{\boldsymbol{\mu}}$, ortalama vektörün kestirimi olarak ifade edilirse, Stein bu kestirimdeki kaybın, $\|\hat{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu}\|^2$, yansız bir şekilde kestirilebileceğini göstermiştir [14]. Donoho, bu sonucu ve yumuşak kestirim aracını kullanarak, SURE eşik değerininin (7) ile ifade edilebileceğini göstermiştir.

$$\mathrm{SURE}(\lambda;\mathbf{X}) = s - 2.\#\{i : |X_i| \le \lambda\} + [\min(|X_i|,\lambda)]^2, \quad X_i = \frac{w_{j,k}}{\sigma} \tag{7}$$

SURE eşik değeri, her seviyedeki katsayılar için ayrıca hesaplanır. Bu eşik değerini hesaplamada kullanılan gürültünün standard sapması, değiştirilmiş evrensel eşik yönteminde olduğu gibi, bir katsayı ile oranlanarak yeni bir eşik değeri hesaplanabilir.

2.7 GCV (Generalized Cross Validation)

Genelleştirilmiş çarpraz geçerleme, çarpraz geçerlemenin bir uzantısıdır ve eşik değeri (8) ile hesaplanır.

$$\mathrm{GCV}(\lambda) = \frac{\frac{1}{N}.\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_\lambda\|^2}{\left(\frac{N_0(\lambda)}{N}\right)^2} \tag{8}$$

$\mathbf{w}$, gürültülü işaretin dalgacık dönüşüm katsayılarını, $\mathbf{w}_\lambda$ eşiklenmiş katsayıları belirtmektedir ve $N_0 = \#\{i | w_{\lambda i} = 0\}$. Eşik değeri $\lambda = \mathrm{argmin}\,\mathrm{GCV}(\lambda)$ ile bulunur. SURE gibi, GCV de her seviyede hesaplanır. Ayrıca, gürültünün standard sapmasının bilinmesine gerek yoktur.

3. Sonuçlar

Bu çalışmada kullanılan temel yöntemler, evrensel eşik (universal thresholding) [1], vektor eşik (vector thresholding) [9], SURE [10] ve GCV [11] yöntemleridir. GHM [3], CL [4], SA4 [5] ve SE [6] çoklu-dalgacıkları ile D4 [12] ve Bi9/7 [13] dalgacıkları kullanılmıştır. SE çoklu dalgacıkları, özel bir önsüzgeçleme işlemine gerek duymayacak şekilde tasarlandıkları için birim matris (identity matrix-ID) ile önsüzgeçleme işlemi ile yetinebilmektedirler. GHM çoklu dalgacıkları için bir üçüncü dikgen önsüzgeçleme işlemi (orthognal approximation prefilter) [15] tanımlanmıştır. Dalgacıklar için geliştirilmiş olan evrensel eşik, SURE ve GCV yöntemleri bu çalışmada çoklu-dalgacıklara uyarlanmıştır. İlk iki yöntemin, daha iyi sonuçlar vermesi için çeşitli geliştirmeler tasarlanmıştır. Vektör eşik yöntemi ise, çoklu-dalgacık dönüşümünün ortak değişinti özellikleri gözönüne alınarak önerilmiştir. Kullanılan iki dalgacıktan, Bi9/7 çiftdikgen (biorthogonal) olup, daha çok yokolan momente (vanishing moment) sahip olduğu için diğer dalgacık ve çoklu-dalgacılardan avantajlı durumdadır. Fakat, aynı zamanda uzun süzgeç yapısı ile işlem yükü çok daha fazladır. Standart sapması 25 olan beyaz Gaussian gürültü ile kirletilerek oluşturulan 6.8739 işaret/gürültü oranlı Lena imgesi kullanılarak elde edilen sonuçlar Tablo.1'de verilmiştir. Çıktılardan da açıkça göründügü üzere, çoklu-dalgacık tabanlı yöntemler, dalgacık tabanlı yöntemlerden daha iyi sonuçlar vermektedir. Bu durum, D4 dalgacık sonuçlarında açıkça görülmektedir. Daha çok yokolan momentli Bi9/7 dalgacığı, D4'ten başarılı sonuçlar verse de, çoklu-dalgacıklar ile kıyaslandığında, en iyi sonuçları yine çoklu-dalgacıkların verdiği görülmektedir.

Tablo.1 Gürültü temizleme sonuçları (işaret/gürültü)

Tip	Evrensel Eşik 1	Evrensel Eşik 2	Vektör Eşik	SURE 1	SURE 2	GCV
D4	10.3724	10.9675	10.3724	13.2933	13.2933	12.8555
BI9/7	10.6322	11.0612	10.4644	13.4260	13.4289	12.6369
GHM /RR	11.1852	13.3439	12.9596	13.0810	13.0187	10.7049
GHM /AP	11.1469	12.7409	12.0804	12.5509	12.5423	12.6308
GHM /ORAP	10.4220	10.9992	12.0366	13.2763	13.2763	12.8853
CL /RR	10.1776	13.3759	13.3222	13.0806	13.8773	9.2033
CL /AP	7.3575	10.8617	8.6292	7.5662	10.7339	12.8612
SA4 /RR	10.4557	12.1619	13.2421	13.4709	12.8956	12.9384
SA4 /AP	10.7866	11.3673	12.2822	13.5839	13.5839	13.1196
SE /ID	10.6263	11.1912	12.2270	13.4167	13.4167	12.9392

4. Kaynakça

[1] D. L. Donoho and I. M. Johnston, "Ideal Spatial Adaptation via Wavelet Shrinkage", *Biometrika*, Vol. 81, pp-425-455, 1994

[2] S. Mallat, "Multiresolution Approximations and Wavelet Orthonormal Bases of L^2 (R)", *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 315, pp. 69-87, 1989.

[3] J. Geronimo, D. Hardin and P. R. Massopust, "Fractal Functions and Wavelet Expansions Based on Several Functions", *J. Approx. Theory*, Vol. 78, pp. 373-401, 1994.

[4] C. K. Chui and J. A. Lian, "A study of Orthonormal Multiwavelets", *Texas A&M U. CAT Report*, No. 351, 1995.

[5] L. X. Shen, H. H. Tan, and J. Y. Tham, "Symmetric-antisymmetric Orthonormal Multiwavelets and Related Scalar Wavelets", 1997, *http://citeseer.nj.nec.com/cs*.

[6] I. Selesnick, "Interpolating Multiwavelet Bases and the Sampling Theorem", 1998, *http://citeseer.nj.nec.com/cs*.

[7] V. Strela, P. Heller, G. Strang, P. Topiwala, and C. Heil, "The Application of Multiwavelet Filter Banks to Signal and Image Processing", *IEEE Transac. on Image Processing*, 1998.

[8] V. Strela and A. T. Walden, "Denoising via Wavelet Shrinkage: Orthogonal, Biorthogonal and Multiple Wavelet Transforms", *T. Report*, Imperial College of Science, UK, 1998.

[9] T. R. Downie and B. W. Silverman, "The Discrete Multiple Wavelet Transform and Thresholding Methods", *IEEE Transac. on Signal Processing*, Vol. 46, pp. 2558-2561, 1998.

[10] D. L. Donoho and I. M. Jonhston, "Adapting to Unkown Smoothness via Wavelet Shrinkage", *J. American Statist. Assoc*., Vol. 90, pp. 1200-1224, 1995.

[11] N. Weyrich and G. T. Warhola, "Wavelet Shrinkage and Generalized Cross Validation for Image Denoising", *IEEE Trans. on Image Processing*, Vol.7, No.1, pp.82-90, 1998.

[12] I. Daubechies, "Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets", *Commun. On Pure and Appl. Math*., Vol. 41, pp. 909-996, 1988.

[13] A. Cohen, I. Daubechies and J. C. Feauveau, "Biorthogonal Bases of Compactly Supported Wavelets", *C. On Pure and Appl. Math*., Vol. 45, pp. 485-560, 1992.

[14] C. Stein, "Estimation of the Mean of a Multivariate Normal Distribution", *Annals. of Statist.*, Vol. 9, pp. 1135-1151, 1981.

[15] D. P. Hardin and D. W. Roach, "Multiwavelet Prefilters I: Orthogonal Prefilters Preserving Approximation Order p<=2", *http://citeseer.nj.nec.com/cs*.